

Marius Perianu

Cătălin Stănică

Daniela Stănică

Matematică

caiet pentru vacanța de vară

clasa a VI-a

art
educațional

Competențe generale

1. Identificarea unor date și relații matematice și corelarea lor în funcție de contextul în care au fost definite
2. Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse în enunțuri matematice
3. Utilizarea algoritmilor și a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situații concrete
4. Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situații concrete și a algoritmilor de prelucrare a acestora
5. Analiza și interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situații-problemă
6. Modelarea matematică a unor contexte problematice variate, prin integrarea cunoștințelor din diferite domenii

Valori și atitudini

- Dezvoltarea unei gândiri deschise și creative; dezvoltarea inițiativei, independenței în gândire și în acțiune pentru a avea disponibilitatea de a aborda sarcini variate
- Manifestarea tenacității, a perseverenței, a capacității de concentrare și a atenției distributive
- Dezvoltarea spiritului de observație
- Dezvoltarea simțului estetic și critic, a capacității de a aprecia rigoarea, ordinea și eleganța în arhitectura rezolvării unei probleme sau a construirii unei teorii
- Formarea obișnuinței de a recurge la concepte și metode matematice în abordarea unor situații cotidiene sau pentru rezolvarea unor probleme practice
- Formarea motivației pentru studierea matematicii ca domeniu relevant pentru viața socială și profesională

Cuprins

Tema 1. Divizibilitatea numerelor naturale	7
Tema 2. Mulțimea numerelor raționale pozitive	23
Tema 3. Rapoarte și proporții. Procente	48
Tema 4. Numere întregi	70
Tema 5. Dreapta	88
Tema 6. Unghiul	102
Tema 7. Paralelism și perpendicularitate	118
Tema 8. Triunghiul	131
Tema 9. Probleme pentru pregătirea examenului de Evaluare Națională	145
Tema 10. Introducere – LA CE VA FI în clasa a VII-a	167
Tema 11. Probleme ... cu probleme – pentru a ajunge în TOP	173
Tema 12. Matematică distractivă – sau probleme serioase?	190

Algebră

1. Mulțimea numerelor naturale

1.1. Identificarea în exemple, în exerciții sau în probleme a noțiunilor: divizor, multiplu, numere prime, numere compuse, c.m.m.d.c., c.m.m.m.c.

1.2. Aplicarea criteriilor de divizibilitate (cu 10, 2, 5, 3, 9) pentru descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

1.3. Utilizarea algoritmilor pentru determinarea c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru două sau mai multe numere naturale

1.4. Exprimarea unor caracteristici ale relației de divizibilitate în mulțimea numerelor naturale, în exerciții și probleme care se rezolvă folosind divizibilitatea

1.5. Deducerea unor reguli de calcul cu puteri și a unor proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale, în exerciții și probleme

1.6. Transpunerea unei situații-problemă în limbajul divizibilității în mulțimea numerelor naturale, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

2. Mulțimea numerelor raționale pozitive

2.1. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional

2.2. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pozitive pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x \pm a = b$, $x \times a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax \pm b = c$, unde a, b, c sunt numere raționale pozitive

2.3. Utilizarea proprietăților operațiilor în efectuarea calculelor cu numere raționale pozitive

2.4. Redactarea soluțiilor unor probleme rezolvate prin ecuațiile studiate în mulțimea numerelor raționale pozitive

2.5. Determinarea regulilor de calcul eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale pozitive

2.6. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale pozitive și a ordinii efectuării operațiilor

3. Rapoarte și proporții

3.1. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale în enunțuri diverse

3.2. Reprezentarea unor date sub formă de tabele sau de diagrame statistice în vederea înregistrării, prelucrării și prezentării acestora

3.3. Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale

3.4. Caracterizarea și descrierea mărimilor care apar în rezolvarea unor probleme prin regula de trei simplă

3.5. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, procentelor sau proporțiilor

3.6. Rezolvarea cu ajutorul rapoartelor și proporțiilor a unor situații-problemă și interpretarea rezultatelor

4. Numere întregi

4.1. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate

4.2. Utilizarea operațiilor cu numere întregi și a proprietăților acestora în rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor

4.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi

4.4. Redactarea soluțiilor ecuațiilor și inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi, în rezolvarea sau în compunerea unei probleme

4.5. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi

4.6. Transpunerea unei situații-problemă în limbaj algebric,

Geometrie

1. Dreapta

1.1. Recunoașterea și descrierea unor figuri geometrice plane în configurații date

1.2. Stabilirea coliniarității unor puncte și verificarea faptului că două unghiuri sunt adiacente, complementare sau suplementare

1.3. Utilizarea proprietăților referitoare la drepte și unghiuri pentru calcularea unor lungimi de segmente și a măsurilor unor unghiuri

1.4. Exprimarea prin reprezentări geometrice a noțiunilor legate de drepte și unghiuri

1.5. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculelor de lungimi de segmente și de măsuri de unghiuri

1.6. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice în corelație cu determinarea unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri

2. Unghiuri

2.1. Identificarea triunghiurilor în configurații geometrice date

2.2. Stabilirea congruenței triunghiurilor oarecare

2.3. Clasificarea triunghiurilor după anumite criterii date sau alese

2.4. Exprimarea proprietăților figurilor geometrice în limbaj matematic

2.5. Interpretarea cazurilor de congruență a triunghiurilor în corelație cu cazurile de construcție a triunghiurilor

2.6. Aplicarea metodei triunghiurilor congruente în rezolvarea unor probleme matematice sau practice

3. Perpendicularitate și paralelism

3.1. Exprimarea poziției dreptelor în plan (paralelism, perpendicularitate) prin definiții, notații, desen

3.2. Interpretarea perpendicularității în relație cu paralelismul și cu distanța dintre două puncte

3.3. Transpunerea unei situații-problemă în limbaj geometric, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

4. Congruența triunghiurilor

4.1. Recunoașterea și descrierea unor elemente de geometrie plană în configurații geometrice date

4.2. Utilizarea instrumentelor geometrice (riglă, echer, raportor, compas) pentru a desena figuri geometrice plane descrise în contexte matematice date

4.3. Determinarea și aplicarea criteriilor de congruență a triunghiurilor dreptunghice

5. Proprietăți ale triunghiurilor

5.1. Recunoașterea și descrierea unor proprietăți ale triunghiurilor în configurații geometrice date

5.2. Calcularea unor lungimi de segmente și a unor măsuri de unghiuri utilizând metode adecvate

5.3. Utilizarea unor concepte matematice în triunghiul isoscel, în triunghiul echilateral sau în triunghiul dreptunghic

5.4. Exprimarea caracteristicilor matematice ale triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi prin definiții, notații și desen

5.5. Deducerea unor proprietăți ale triunghiurilor folosind noțiunile studiate

5.6. Interpretarea informațiilor conținute în probleme legate de proprietăți ale triunghiurilor

Tema 1

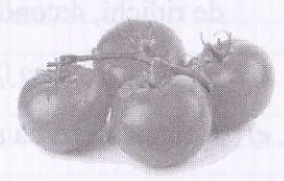
Divizibilitatea numerelor naturale



3 lei
legătura



15 lei
bucata



10 lei
kilogramul

1. — Ce ați dori să cumpărați de la noi?

— Vă rog, 5 legături de ridichi, o conopidă și 6 kg de roșii.

— Toate acestea vă costă numai 98 de lei, precizează vânzătoarea.

— Cred că ați greșit calculul, spune Monica.

a) Pe ce proprietate a numerelor se bazează Monica când nu este de acord cu suma de 98 de lei?

— Oh, da, am greșit, toate astea costă 95 de lei!

— Totuși, revine Monica, nici acum calculul nu este corect.

b) Pe ce proprietate a numerelor se bazează Monica când este sigură că nici 95 nu-i suma corectă?

— Aaaa, vă rog să mă scuzați, aveți dreptate trebuie să plătiți 90 de lei.

c) Dacă Monica ar fi cumpărat 10 legături de ridichi, 2 conopide și

câteva kg de roșii, cum ar trebui să fie suma de plată?

- d) Cu ce număr ar trebui să fie divizibilă suma de plată pentru 8 legături de ridichi, 4 conopide și 2 kg de roșii?

- e) Ce notă crezi că a primit Monica, la testul de matematică cu tema *Divizibilitatea numerelor*? De ce?

2. Completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

a) Numărul 36 este divizibil cu numărul

b) Numărul este divizibil cu 5;

c) Un multiplu al numărului 17 este

d) Numărul 8 este un divizor al numărului

e) Divizorii proprii ai numărului sunt 2 și 3;

f) Multiplii lui 15, mai mici decât 48 sunt

g) Numărul are ca divizori *improprii* pe 1 și pe 72;

h) Numărul divizorilor numărului 24 este egal cu

i) Un divizor comun al numerelor 124 și 250 este egal cu

j) Un multiplu comun al numerelor 10 și 15 este egal cu

3. Determinați elementele următoarelor mulțimi:

a) $D_{18} =$

b) $D_{20} =$

c) $D_{35} =$

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in M_4, x < 19\} =$

e) $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \in M_5, x < 35\} =$

f) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in M_7, 14 < x < 45\} =$

4. a) Un multiplu al lui 20 cuprins între 110 și 240 este

b) Un multiplu al lui 25 cuprins între 220 și 310 este

5. Determinați numărul divizorilor următoarelor numere naturale:

a) 120;

Se descompune numărul 120 în produs de puteri de factori primi și se obține $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$. Numărul divizorilor lui 120 este egal cu rezultatul produsului $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$.

b) 72; $72 =$

c) 225;

d) 300.

6. a) Determinați numărul numerelor naturale cuprinse între 110 și 220 care sunt divizibile cu 2.

Numerele căutate sunt 112, 114, 116, ..., 218. Avem $112 = 2 \cdot 56$, $114 = 2 \cdot 57$, ..., $218 = 2 \cdot 109$. Problema revine la a determina câte numere naturale sunt de la 56 până la 109. Sunt $109 - 56 + 1 = 54$ numere naturale.

b) Determinați numărul numerelor naturale cuprinse între 134 și 245 divizibile cu 3.

c) Determinați numărul numerelor naturale cuprinse între 27 și 324 divizibile cu 5.

d) Determinați numărul numerelor naturale cuprinse între 93 și 250 divizibile cu 9.

7. a) Câte numere naturale de forma $\overline{35a}$ sunt divizibile cu 2?

b) Câte numere naturale de forma $\overline{3ab}$ sunt divizibile cu 2?

c) Câte numere naturale de forma $\overline{35a}$ sunt divizibile cu 3?

d) Câte numere naturale de forma $\overline{3ab}$ sunt divizibile cu 3?

8. a) Arătați că numărul $A = \overline{xy} + \overline{y5} + \overline{6x}$ este divizibil cu 11, oricare ar

fi cifrele nenule x și y .

Avem $A = \overline{xy} + \overline{y6} + \overline{6x} = 10x + y + 10y + 6 + 60 + x = 11x + 11y + 66$.

Observăm că 11 este factor comun, deci $A = 11(x + y + 6) : 11$.

b) Arătați că numărul $B = \overline{5xy} + \overline{x3y} + \overline{xy7}$ este divizibil cu 3, oricare ar fi cifrele x și y , $x \neq 0$.

c) Arătați că numărul $C = \overline{xy} + \overline{yz} + \overline{zx}$ este divizibil cu 11, oricare ar fi cifrele nenule x , y și z .

d) Arătați că numărul $D = \overline{xy2} + \overline{yz3} + \overline{zt4} + \overline{tx1}$ este divizibil cu 5, oricare ar fi cifrele nenule x , y , z și t .

9. a) Determinați numerele de forma $\overline{a4b3}$ divizibile cu 3.

Dacă $\overline{a4b3}$ este divizibil cu 3, atunci $(a + b + 7) : 3$. Suma $a + b$ poate lua valorile 2, 5, 8, 11, 14 sau 17. Numerele cerute sunt 1413, 2403, 1443, 2433, 3423, 4413, 5403, 1473, 2463, 3453, 4443, 5433, 6423, 7413, 8403, 2493, 3483, 4473, 5463, 6453, 7443, 8433, 9423, 5493, 6483, 7473, 8463, 9453, 8493 și 9483.

b) Determinați cele mai mari șase numere de forma $\overline{2a6b}$ divizibile cu 3.

c) Determinați numerele de forma $\overline{ab23}$ divizibile cu 9.

10. Determinați următoarele mulțimi:

a) $D_{10} \cap M_5; \{ \dots \}$

b) $D_{12} \cap M_6; \{ \dots \}$

c) $D_{20} \cup D_{15}; \{ \dots \}$

d) $D_{40} \cap M_5; \{ \dots \}$

11.a) Arătați că numărul $A = 9^{1996} - 7^{1992}$ este divizibil cu 10.

Vom calcula ultima cifră a numărului A . Ultima cifră a numărului 9^{1996} este 1, iar ultima cifră a numărului 7^{1992} este egală tot 1, deci ultima cifră a lui A este 0. Conform criteriului de divizibilitate cu 10, obținem că A este divizibil cu 10.

b) Arătați că numărul $B = 5^{2013} - 3^{2013}$ este divizibil cu 2.

c) Arătați că numărul $C = 6^{2013} - 3^{2012}$ este divizibil cu 5.

12.a) Scrieți numerele prime mai mici decât 35.

b) Determinați numerele prime a și b știind că $3a + 16b = 54$.

16b și 54 sunt numere pare, deci $\dots$

c) Determinați numerele prime a și b știind că $7a + 16b = 94$.

d) Determinați numerele prime a, b, c știind că $2a + 5b + 6c = 74$.

13.a) Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor 12 și 18.

b) Determinați cel mai mare divizor comun al numerelor 240 și 150.

c) Determinați cel mai mic multiplu comun al numerelor 12 și 18.

d) Determinați cel mai mic multiplu comun al numerelor 240 și 150.

14.a) Determinați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 24, 48 și 40 dă de fiecare dată restul 17 și câțuri nenule.

b) Determinați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 12, 15 și 27 dă de fiecare dată restul 3 și câturi nenule.

c) Determinați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 14, 21 și 35 dă de fiecare dată restul 6 și câturi nenule.

15.a) Determinați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la numerele 5 și 7 dă resturile 2 și respectiv 4.

$n = 5x + 2$ și $n = 7y + 4$. Adunăm 3 în ambii membri ai fiecărei relații (am observat că $5 - 2 = 7 - 4 = 3$) și obținem: $n + 3 = 5x + 5 = 5(x + 1)$, deci $n + 3$ este multiplu al lui 5. (1)

$n + 3 = 7y + 7 = 7(y + 1)$, deci $n + 3$ este un multiplu al lui 7. (2)

Din (1), (2) și din faptul că n este cel mai mic număr, avem că $n + 3$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor 5 și 7,

adică $n + 3 = 35$, $n = 32$.

b) Determinați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la numerele 12 și 15 dă resturile 5 și respectiv 8.

c) Determinați cel mai mic număr natural care împărțit la numărul 24 dă restul 10, și împărțit la 36 dă restul 22.

16.a) Numerele 127, 53, 76 împărțite la același număr natural nenul n dau resturile 7, 5 și respectiv 4. Determinați numărul natural n .

b) Numerele 47, 53, 64 împărțite la același număr natural nenul n dau resturile 2, 3 și respectiv 4. Determinați numărul natural n .

c) Numerele 66, 142, 113 împărțite la același număr natural nenul n dau resturile 6, 7 și respectiv 8. Determinați numărul natural n .

17.a) Dacă $2a + 3b = 65$ și $(a, b) = 5$, atunci determinați numerele naturale a și b .

Din $(a, b) = 5$, obținem $a = 5x$, $b = 5y$ și $(x, y) = 1$. Relația $2a + 3b = 65$ devine $10x + 15y = 65$ și împărțind prin 5 termenii egalității obținem $2x + 3y = 13$. După valorile lui y studiem cazurile: $y = 1, x = 5; y = 2, x = 3$ și $y = 3, x = 2$. Perechile (a, b) de numere căutate sunt $(25, 5), (15, 10)$ și $(10, 15)$.

b) Dacă $a \cdot b = 294$ și $(a, b) = 7$, atunci determinați numerele naturale a și b .

18. Utilizând proprietatea „ $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$ ” determinați numerele naturale a și b în fiecare dintre cazurile:

a) $[a, b] = 150$ și $a \cdot b = 750$;

b) $[a, b] = 72$ și $a \cdot b = 864$.

19.a) Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{1x3y}$ divizibile cu 6.

$\overline{1x3y} : 6, 6 = 2 \cdot 3, (2, 3) = 1 \Rightarrow \overline{1x3y} : 2$ și $\overline{1x3y} : 3 \Rightarrow$

b) Găsiți toate numerele naturale de forma $\overline{2x5y}$ divizibile cu 12.

c) Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{4xy6}$ divizibile cu 36.